Robert Müller
Bundesrealgymnasium Wien 3

Ein kurzer Weg zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kenner des Neuen Lehrplans und der Materie könnten den Titel leicht als Hohn mißverstehen, ist doch gerade der Neue Lehrplan für die Oberstufe der AHS im Bereich der Stochastik (bei gleichzeitiger Stundenkürzung) gewaltig angewachsen, und ist doch gerade die Materie "Wahrscheinlichkeitsrechnung" äußerst komplex, sodaß ein "kurzer" Weg für viele nirgends zu sehen ist.

Offenbar gibt es aber Leute - zumindest jene, die den Lehrplan verfaßt haben - die einen solchen kurzen, schultauglichen Weg vor Augen haben. Als Mitglied dieser Kommission will ich <u>einen</u> (vgl. [L3]) solchen kurzen Weg, wie er während der langwierigen Diskussionen bei der Erstellung des Neuen Lehrplans vor meinem geistigen Auge immer konkretere Gestalt annahm und letztlich auch in einem Lehrbuch [L1] in seinen wesentlichen Zügen verwirklicht wurde, aufzeigen und kommentieren.

Beginnen wir mit der Frage: Was ist ein kurzer, schultauglicher Weg ? Was muß er beinhalten ? Oder konkreter:

- Was sind die fundamentalen Ideen, die bei aller Kürze unbedingt behandelt werden sollen ? Und wie sollen sie behandelt werden ?
- Wie hat man bisher Wahrscheinlichkeitsrechnung in der AHS betrieben ? Was davon ist entbehrlich ? Was fehlte ?

Auf die erste Frage gibt der Neue Lehrplan unter der Überschrift "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik" folgende Antwort:

> Schwerpunkt soll das Arbeiten mit zumindest einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und das Bearbeiten von Problemen der Beurteilenden Statistik sein. Dazu ist eine ausführliche Behandlung des Berechnens von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten einzelner Ereignisse

nicht unbedingt erforderlich. Die Verwendung von Rechengeräten und geeigneter Software ist zweckmäßig. Das Anwenden soll mit kritischen Betrachtungen, insbesondere von Problemen der mathematischen Modellbildung, verbunden werden. Theoretische Fundierungen der verwendeten Begriffe können auch in der 8. Klasse erfolgen.

Ermitteln und Deuten von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten:

Einsicht gewinnen, daß Wahrscheinlichkeiten durch Zufallsexperimente oder (rechnerische) Überlegungen aufgrund von verschiedenen Annahmen (etwa Unabhängigkeit, Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse) ermittelt werden können. Kritisches Betrachten solcher Annahmen. Kennen verschiedener Deutungen von Wahrscheinlichkeit (etwa als Anteil, als relative Häufigkeit, als subjektives Vertrauen).

Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Kennen und Interpretieren der Begriffe Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und Varianz; Herstellen von Beziehungen zu den entsprechenden Begriffen bei Häufigkeitsverteilungen. Arbeiten mit diesen Begriffen, insbesondere beim Lösen von Anwendungsaufgaben mit der Binomialverteilung oder der Normalverteilung.

Testen und Schätzen:

Prüfen von Hypothesen; Schätzen von Parametern (etwa von Wahrscheinlichkeiten) oder nichtparametrisches Testen.

Allenfalls Berechnen von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten: Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten mittels Diagrammen (etwa Baumdiagrammen) oder Regeln (etwa Additionsregel, Multiplikationsregel) oder Verteilungsgesetzen (etwa der Binomialverteilung). Verwenden der BAYESschen Formel.

Man sieht: Der Lehrplan gibt in Form der Zwischenüberschriften auf die Frage nach den "fundamentalen Ideen" drei Hauptstoßrichtungen vor, wobei er aber als Rahmenlehrplan dem Lehrer bei der Gestaltung seines Unterrichts viel Freiheit läßt.

So wird z.B. nicht gesagt, welche Verteilung(en) behandelt werden soll(en), welche Tests angewendet werden sollen, ob man Wahrscheinlichkeiten "kombinatorisch", "aus Verteilungsgesetzten" oder aus Diagrammen (Baumdiagrammen, Vierfeldertafeln) berechnen soll.

Bei der Beantwortung der zweiten Frage sollte man die bisherige Unterrichtspraxis einbeziehen. Leider läßt diese nur bedingt Rückschlüsse zu. Den wichtigsten Rückschluß läßt vielleicht die Tatsache zu, daß (laut Befragung der Studenten) nur rund 50% überhaupt jemals irgendetwas von Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht gehört haben (vor zehn Jahren waren es nur etwa 3% [L4]. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört offenbar zu den wenig geliebten Kapiteln im Unterricht. Was können die Gründe dafür sein ?

Neben dem Umstand, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung lange Zeit in der universitären Lehrerausbildung ein Schattendasein führte, liegt der Grund meines Erachtens auch darin, daß im Unterricht (und den Lehrbüchern) die falschen Schwerpunkte gesetzt wurden, naive Methoden weitgehend fehlen bzw. zu früh formalisiert wurden. Hiezu einige Thesen:

<u>These 1</u>: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 7. Klasse wird nach wie vor als "Kombinatorik" - die eigentlich keine ist - betrieben, aber nicht als Wahrscheinlichkeitsrechnung (also als Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten):

In den Beispielen wurden nicht Zählverfahren anschaulich·suggestiv dargestellt, daraus Zählformeln entwikkelt und begründet, sondern einige wenige fertige Zählverfahren eingesetzt, wobei der Schüler oft riet, ob er nun die Formel für Variationen mit Wiederholung oder doch die für Kombinationen ohne Wiederholung anwenden soll, und ob die Wahrscheinlichkeiten in den Zwischenergebnissen addiert oder multipliziert werden müssen. Die meisten dieser Beispiele sind Anwendungen des Verteilungsgesetzes der Binomialverteilung bzw. der Hypergeometrischen Verteilung und der Pfadregeln, ohne dies aber zu nutzen. Ein typisches Beispiel dazu aus [L2]:

Beispiel A: In einer Urne sind 7 weiße und 11 schwarze Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Griff 2 weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen !

In den ausführlichen Lösungen steht:

Anzahl der möglichen Fälle: $\binom{18}{3} = \frac{18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3}$

Anzahl der günstigen Fälle: Auf $\binom{7}{2}$ Arten können 2 weiße Kugeln und auf 11 Arten 1 schwarze Kugel ausgewählt werden. Das gibt insgesamt $\binom{7}{2}\cdot 11$ günstige Fälle.

$$P(E)= \binom{7}{2}\cdot 11\cdot \frac{3\cdot 2\cdot 1}{18\cdot 17\cdot 16} \approx 0,28$$

Man sieht: Man rechnet nicht mit Wahrscheinlichkeiten, sondern zählt bestimmte Anzahlen und setzt zum Schluß in die LAPLACEsche Wahrscheinlichkeits-"Definition" ein. Dabei erfolgt die Abzählung (und deren Begründung) völlig unanschaulich, ohne Darstellungshilfsmittel. Wenn man schon in eine fertige Formel einsetzen will, dann doch gleich in das Verteilungsgesetz der Hypergeometrischen Verteilung, deren Anwendbarkeit durch die Art der Ziehung zweifelsfrei vorliegt.

Fortsetzung von Beispiel A: Durch Anwenden des Verteilungsgesetzes der Hypergeometrischen Verteilung (dabei ist X die Anzahl der weißen Kugeln, n=3, k=2, N=18, M=7) erhalten wir:

$$P(X=2)=\frac{\binom{7}{2}\cdot\binom{18-7}{3-2}}{\binom{18}{3}} = 0{,}28$$

<u>These 2</u>: Die ausschließliche Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein "einzelnes" Ereignis stattfindet ohne Betrachtung der zugehörigen Verteilung, gibt ein nur unzureichendes "feeling" für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses und erschwert die Interpretation des Ergebnisses.

Schon aus der Unterstufe weiß der Schüler, daß die ausschließliche Angabe der Gipfelhöhe eines Berges ohne Kenntnis darüber, wie es um ihn herum ausschaut, nicht sehr aussagekräftig ist. (Vgl. absolute und relative Höhenangaben!) Obwohl natürlich Wahrscheinlichkeiten in gewissem Sinn schon relativ sind, ist auch hier die Betrachtung der Verteilung in vielen Fällen unerläßlich. Insbesondere gilt dies bei Glücksspielen (Zahlenlotto), wo viel zusehr auf den Hauptgewinn geschaut wird, obwohl dieser unter Umständen über die - viel wichtigere - Gewinnerwartung wenig aussagt:

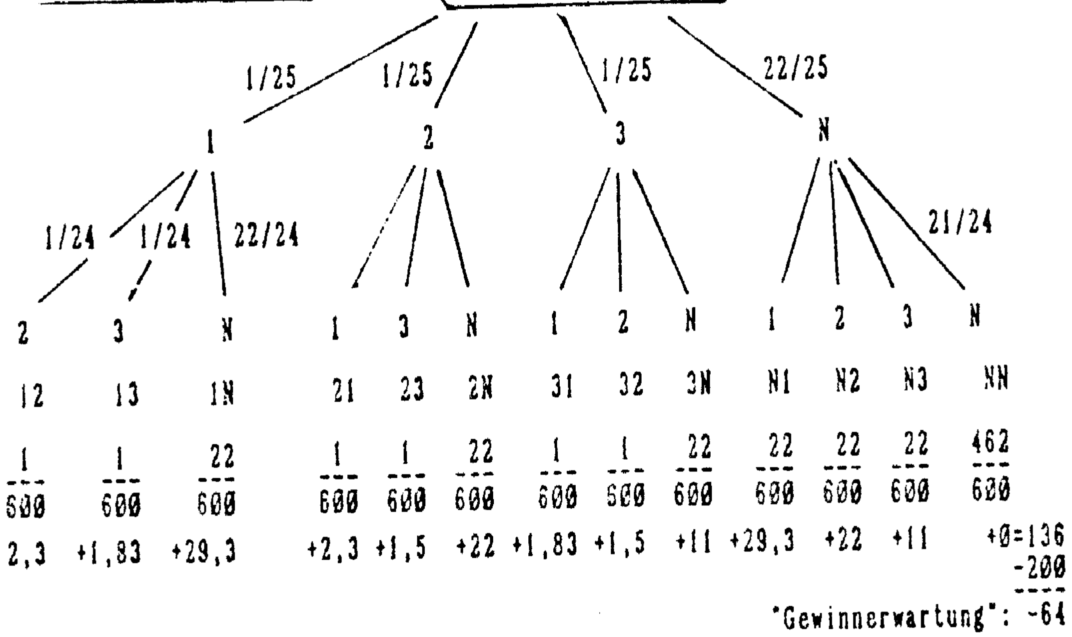
Beispiel B: Herr Müller kauft (gegen besseres Wissen) bei einer Tombola 2 der insgesamt 25 Lose zu einem Stückpreis von 100S. Insgesamt gewinnen 3 Lose, und zwar:

1. Preis: Warenkorb im Wert von 800S
2. Preis: Warenkorb im Wert von 600S
3. Preis: Warenkorb im Wert von 300S

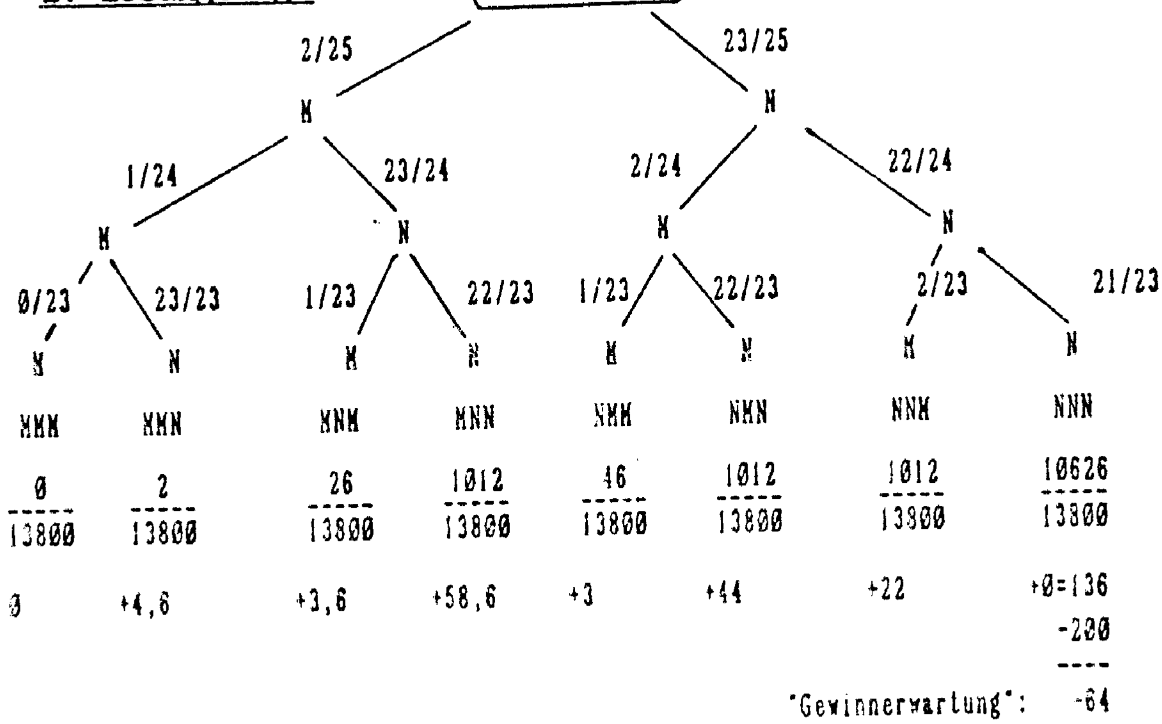
Welchen Gewinn (Verlust) darf (muß) er erwarten ?

<u>Lösung:</u> Wir ermitteln alle möglichen Ergebnisse, dann deren Wahrscheinlichkeiten und zuletzt die jedem Ereignis zugehörige Gewinnerwartung mittels zweier unterschiedlicher Modelle:

1. Lösungsweg:



2. Lösungsweg:



Insbesondere bei den Hypothesenprüfungen erschwert die Fixierung auf Einzelereignisse statt auf die ganze Verteilung das grundsätzliche Verständnis so, daß es vielfach zu fatalen Mißverständnissen kommt. Betrachten wir dazu das folgende

Beispiel C: Eine Fahrschule A behauptet, daß ihre Kandidaten besser seien als die der Konkurrenz B, bei der nur 50% der Kandidaten beim ersten Versuch bestanden hätten, während bei ihnen von 20 Kandidaten 14 bestanden hätten.

Lösung: Nehmen wir an, daß die Fahrschule A genauso gut wäre wie die anderen, daß also die Hypothese H: $p=0{,}5$ gilt. Dann ist das Ereignis $X=14$ (X ... Anzahl der erfolgreichen Prüfungen) tatsächlich "verdächtig", weil es ja mit der vergleichsweise geringen Wahrscheinlichkeit $P(X=14)=0{,}036697 \approx 3{,}7\%$ eintreten sollte, aber "dennoch" eingetreten ist. Aber: Ist dieser Vergleich wirklich sinnvoll ? Die Wahrscheinlichkeit, dieses oder ein (für A) noch vorteilhafteres Ergebnis zu erhalten, ist keineswegs so gering, daß man diesen Rückschluß als "zwingend" betrachten sollte. Immerhin ist unter der Annahme H: $p=0{,}5$ $P(X\geq 14)=0{,}05766\approx 5{,}8\%$ (und damit das Ergebnis nicht signifikant). Man sieht: Die Betrachtung "punktueller" Ereignisse ist hier unsinnig, und man sollte dieser Betrachtungsweise daher auch nicht im Aufbau des Kapitels Stochastik Vorschub leisten.

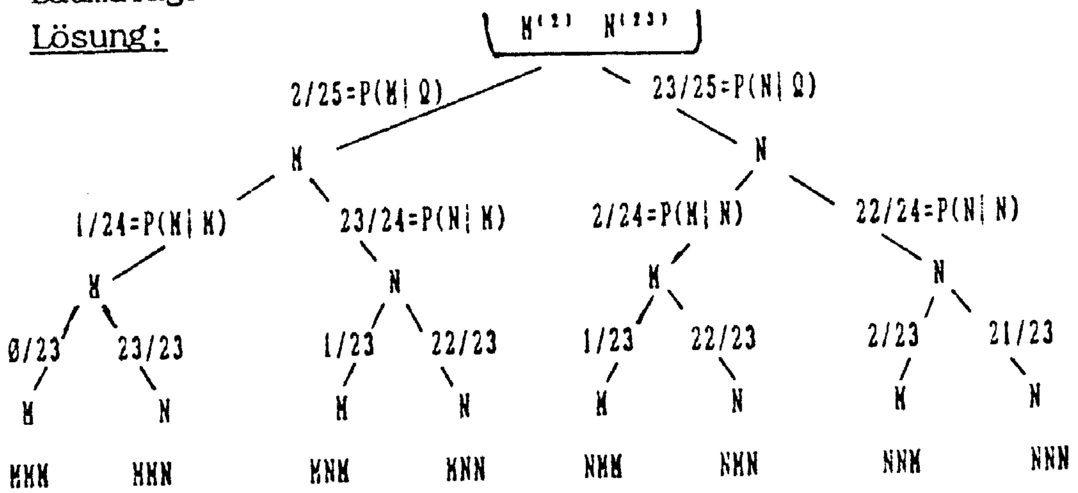
These 3: Grundlegende Ideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden vielfach in Definitionen "verpackt" und so "wegdefiniert". Ein typisches Beispiel hiefür ist etwa die Bedingte Wahrscheinlichkeit. Der Schüler lernt sie vielfach in Form der Definition

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

als leere Begriffshülse kennen. Er erkennt nicht, welches - sehr einfache - Prinzip dahinter steht, nämlich die Bildung des relativen Anteils bezüglich eines neuen (kleineren) Grundwerts. Gerade dieses Bildungsprinzip kann man anhand von Baumdiagrammen lange Zeit immer wieder einsetzen, ohne den Begriff "Bedingte Wahrscheinlichkeit" geschweige deren formale Fassung noch thematisieren zu müssen. Dies kann dann in einer zweiten Phase der Formalisierung und theoretischen Absicherung geschehen:

Fortsetzung von Beispiel A: Formalisiere den durch das Baumdiagramm vermittelten Rechengang !

Lösung:



Will man von Anfang an den formalen Apparat (Mengenmodell und Axiomensystem von KOLMOGOROFF) stärker betonen, so empfiehlt sich anstelle von Baumdiagrammen die Verwendung von Vierfeldertafeln (vgl. L3]).

Mein Resümee aus diesem Sachverhalt:

- Kombinatorik in der bisherigen Form ist wenig zweckmäßig und entspricht auch nicht den Intentionen des Neuen Lehrplans.
- Zunächst sollte naiv·anschaulich das Denken mit Baumdiagrammen strukturiert und (anschaulich·suggestiv) systematisiert werden.
- Auf dieser Grundlage können dann (aber müssen nicht unbedingt) Zählformeln entwicklet werden. (Man veranschaulicht und entwickelt z.B. die Flächenformel des Recktecks auch nicht an einem Reckteck mit den Abmessungen 511×704, sondern an einem einfachen, überschaubaren Fall wie 4×3, und leitet erst dann eine allgemeine Formel her.)
- Dabei entsteht der Verteilungsaspekt sozusagen von selbst. Das Verteilungsgesetz der Verteilungsgesetze (der Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung, geometrische Verteilung) muß jedenfalls in einem eigenen Abstraktionsschritt entwickelt werden.
- Dieser Übergang von "punktuellen" Ereignissen zu "Intervallereignissen" ist nicht nur für die Hypothesenprüfung entscheidend, sondern auch für den Übergang zu stetigen Zufallsvariablen (in der 8. Klasse).

- Grundlegende Ideen und Ansätze sollten immer mitschwingen und immer wieder bewußt gemacht werden. Die Einbringung von grundlegenden Ideen durch rein formale Definition von Begriffen dient der logischen Fundierung (Axiomatisierung), aber nicht der psychologischen Fundierung (Genese) der Begriffe. So ist der Begriff "Unvereinbarkeit" bei einem Baum als Fallunterscheidung selbstverständlich, während sie im Mengenmodell (im günstigsten Fall motiviert) erst in der Form $A \cap B = \{\}$ definiert werden muß. Bedingte Wahrscheinlichkeit und "Begünstigungen" sind am Baumdiagramm beim Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen schon auf informaler Ebene verfügbar und darstellbar. Der für die formale Anwendung der Produktregel notwendige Begriff der Unabhängigkeit braucht zunächst nicht behandelt werden. (Und wenn er behandelt wird, so in einer inhaltlich sinnvollen Weise, weil Baumdiagramme einen "vernünftigen", inhaltlich motivierten Versuch beschreiben. Vgl. das berühmte Beispiel zur Abhängigkeit von Storchlandungen und Geburten; stochastisch abhängig heißt eben nicht (unbedingt) kausal abhängig.) Auch die Idee der Bedingten Wahrscheinlichkeit muß nicht erst durch künstliche (hypothetische) Fragestellungen (z.B. wenn man schon weiß, daß...) ins Spiel gebracht werden.

Aus diesem Anliegen heraus ergibt sich (aus meiner persönlichen Sicht folgerichtig z.B.) ein Lehrgang, wie er in [L1] verwirklicht wurde. Der Leser ist aufgefordert nachzuprüfen, daß - und wie - die obigen Gedanken und Intentionen in diesen Lehrgang Eingang gefunden haben.

Literatur:

[L1] Reichel-Müller-Hanisch-Laub: Lehrbuch der Mathematik, Bd. 3, Verlag hpt, Wien 1991

[L2] Laub u.a: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schulen, Bd. 3, Verlag hpt, Wien 1980

[L3] Müller, R.: Bedingte Wahrscheinlichkeit ÖMG Didaktik Reihe, Heft 9, Wien 1982

[L4] Peschek, W.: Projektbericht AHS·Mathematik UBW Klagenfurt, 1979